المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (3) 2002
[ص ص 11 – 25]

نموذج صف انتظار متعدد المراحل

د.عبدالمجيد حمزة الناصر* د.فرحان إسماعيل العاني** ايمان حسن محمود***

الملخص

في المنشآت الصناعية ذات المراحل الإنتاجية المتعددة والتي تتألف كل منها من (K) من المراحل اذ أن مخرجات كل مرحلة تعد مدخلات للمرحلة التي تليها وأن سعة كل صف من صفوف الانتظار داخل هذه المنشآت والتي تربط بين مرحلتين إنتاجيتين متتاليتين هو ذا سعة محددة ، تظهر الحاجة الى السيطرة على عدد الوحدات المنتجة المحصورة بين تلك المراحل ولذلك فقد تم تطوير نموذج رياضي لمنظومة صف انتظار متعددة المراحل ذات سعات متغيرة وتم الحصول على حل للحالة المستقرة بغية الاستدلال على كيفية السيطرة على عدد الوحدات المنتجة بين المراحل محاولة الى تقليل الخسارة وجعلها بأدنى حد .

ABSTRACT

In the industrial foundations which have multistage production systems, each of which consists of (K) of stages so that the outcome of each stage comes to be the income of the following one and each queue which connects each stage with the one after it has a limited capacity , it is necessary the number of units produced in between these stages . Therefore a mathematical model was designed for a multistage queueing system with variable capacities and a steady state solution has been reached to control the number of produced units between the stages to decrease the loss as much as possible.

١–المقدمة

شهدت الاعوام المعاصرة تغيرات نوعية واساسية في خطوات وعمليات اتخاذ القرار وظهرت البحوث العديدة في هذا المضمار نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر :

* أستاذ الاحصاء/كلية الادارة والاقتصاد–جامعة بغداد
** أستاذ مساعد /الكلية الهندسية العسكرية
*** مدرس مساعد

-في عام (1985) قام الباحث (Colin E. Bell)[5] بدراسة المنفعة العائدة على الزبون (قيمة الخدمة المقدمة مطروحاً منها كلفة زمن الانتظار) من خلال تنافس الزبائن للانضمام الى صف الانتظار قبل افتتاح نظام الخدمة وقام بدراسة النموذج تحت مختلف الافتراضات وتأثير سلوك الزبائن على معدل المنفعة .

-في عام (1985) قام الباحث (صادق ماجد محمد)[3] بدراسة نظام صيانة السيارات في جامعة البصرة باستخدام نظرية صفوف الانتظار اذ قام من خلال دراسته بتقييم قدرة نظام الصيانة الموجود على استيعاب السيارات العاطلة واستخراج عدداً من مؤشرات كفاءة الأداء بعد أن وجد نظام صف الانتظار الملائم للحالة المدروسة هو M/M/1/ / /FCFS.

-في عام (1985) قام الباحث (حسين جاسم شيحان)[1] باستخدام نماذج المحاكاة في دراسة حركة السير في مدينة بغداد – تقاطع ابي طالب .

-في عام (1988) قام الباحث (Christian N.Madu)[12] بدراسة نظام صف انتظار لشبكة صيانة علاجية مكونة من محطتي تصليح الأولى لإجراء عمليات صيانة رئيسة والثانية لعمليات الصيانة الثانوية باستخدام طرق عددية إذ تم الحصول الى طريقة حل تقريبية ومبسطة لمشكلة الصيانة العلاجية .

-في عام (1989) قام الباحث (Randolph W. Hall)[11] بتقييم أداء نظام صف انتظار يقوم فيه مقدمي الخدمة بالتناوب بين تقديم خدمة مباشرة للزبائن والقيام بأنشطة إضافية اعتماداً على طول صف الانتظار ويسعى هذا النظام لتقليل زمن انتظار الزبائن في صف الانتظار وزمن بقاء مقدم الخدمة بدون عمل (عاطل) وتقليل تعطيل القيام بالأنشطة الإضافية .

-في عام (1990) قام الباحث (Frhan .I.D.)[7] بتطوير طريقة لمنظومة صف انتظار ذات مرحلة واحدة اذ تكون فيها أزمنة الوصول و/أو أزمنة الخدمة محددة وفقاً (Phase - type Distribution) وذلك باستخدام الطرق العددية والحلول التحليلية .

-في عام (1990) قام كل من الباحثين (U. Chatterjee – S.P. Mukherjee)[6] بدراسة نظام صف انتظار قائم على مبدأ أن يأخذ مقدم الخدمة فترة من الراحة(Vacation) عند خلو صف الانتظار من الزبائن ويفترض هذا النظام أن تتبع الأزمنة بين وصول وآخر توزيع عام وأن تتبع أزمنة الخدمة التوزيع الأسي أما فترات الراحة فهي مستقلة عن بعضها وتأخذ أي توزيع محدد ومعروف وتم الحصول على التوزيعات الاحتمالية لعدد الزبائن بالنظام باستخدام سلاسل ماركوف كما قام الباحثان باشتقاق توزيع زمن انتظار الزبون في صف الانتظار .

-في عام (1996) قام الباحث (Frhan .I.D.)[8] بتقديم طريقة لتحديد حل عـــددي لنمـــوذج تداخل آلي $E_K/E_L/M/N$ تلك التي يكون فيها أزمنة التشغيل والتهيئة يتبع توزيع أيرلانـــك (Erlang Distribution) وقد قام بتصميم خوارزمية كفوءة لتحديد الحل باســـتخدام لغـــة البرمجة Turbo Pascal .

-في عام 1998 قام الباحث (Frhan .I.D.)[9] بتطوير نموذج رياضي لمنظومة صـــف انتظار ذات مرحلتين انتاجيتين الغاية منها السيطرة على عدد الوحدات المنتجة من خـــلال التحكم بمعدلات انتاج مكائن المرحلة الاولى وتم الحصول على حل للحالة المستقرة لها .

-في عام 1999 قام الباحث (Frhan .I.D.)[10] بتطوير نموذج رياضي لمنظومة صـــف انتظار ذات مرحلتين انتاجيتين الغاية منها السيطرة على عدد الوحدات المنتجة من خـــلال التحكم بمعدلات انتاج مكائن المرحلتين الاولى والثانية وتم الحصول علـــى حـــل للحالـــة المستقرة لها .

-في عام (1999) قام الباحث (Imad H.AL-Dean) [2] بإجراء مقارنة بين نوعين مـــن نماذج المحاكاة (نماذج الإضافة الثابتة ونماذج الإضافة المتغيرة) لعدد من نماذج صفـــوف الانتظار ذات محطة الخدمة الأحادية.

-في عام (2000) قام الباحث (Amott R. de palma A.)[4] بإضفـــاء جـــانب معرفـــي اقتصادي على تطبيقات صفوف الانتظار تلك التي أخضعت للتجريب طوال سنوات كما قام باقتراح بعض الطرق الجديدة لمعالجة تلك المشاكل.

وعليه فمن بين اهداف هذا البحث هو تصميم نموذج رياضي لنظام صـــف انتظـــار بمحطات خدمة متعددة وبمراحل متعدده يسعى للسيطرة على عدد الوحـــدات المنتجـــة بيـــن المراحل لاهميته في الجوانب التطبيقية.

2-الجانب النظري

من المفيد ان نوضح رياضيا كيفية بناء نموذج رياضي للمنظومة اعلاه بهدف السيطرة على عدد الوحدات فيها بمعنى آخر أن إيقاف المكائن وتشغيلها بالاعتماد على عدد الوحـــدات المنتجة بين المراحل المختلفة للنظام يؤدي الى ارتفاع وانخفاض الإنتاج تبعاً له ومن ثم التحكم بتلك المعدلات.

تم اللجوء لهذه الطريقة للموازنة بين معدلات إنتاج المكائن بين المراحل. أن الاســـلوب المتبع لحل هذه المشكلة هو:

- تبدأ المنظومة عملها بتشغيل جميع مكائن المرحلة الأولى.

- عندما يبلغ عدد الوحدات المنتجة من قبل مكائن المرحلة الأولى ($1 < n < N_{1,1}$) فأن الماكنة الأولى من المرحلة الثانية سوف يتم تشغيلها.
- يتم إيقاف الماكنة الأولى من المرحلة الأولى وتشغيل الماكنة الثانية من المرحلة الثانية عند بلوغ عدد الوحدات المنتجة بين المرحلتين ($N_{1,1} < n < N_{1,2}$) . . .
- ذكرنا أن مخرجات كل مرحلة تعد مدخلات للمرحلة التي تليها وعليه فأن الوحدة التي تغادر مكائن المرحلة الثانية سوف تدخل مكائن المرحلة الثالثة للمعالجة وتلقي الخدمة وبذلك فأن الماكنة الأولى من المرحلة الثالثة سوف تبدأ عملها عند بلوغ عدد الوحدات بين المرحلتين الثانية والثالثة ($1 < n < N_{2,1}$) .
- عندما يصبح عدد الوحدات بين نفس المرحلتين $n = N_{2,1}$ تبدأ الماكنة الثانية من المرحلة الثالثة عملها.
- وبنفس الاسلوب يتم تشغيل وإيقاف المكائن طبقاً لعدد الوحدات بين كل مرحلتين متتاليتين ولكافة مراحل المنظومة.
- ويمكن تمثيل عمل هذا النموذج من خلال المخطط (1) .أما مخطط الانتقال فموضح بالشكل (2) .

1-2 السلسلة الرمزية للنموذج :

$$M_{Ni,j},\ i = 1, 2, \dots K-1 \quad j = 0, 1, \dots, mi \;\Big/\; M_{Ni,j},\ i = 1, 2, 3, \dots K \quad j = 0, 1, \dots mi \;\Big/\; mi,\ i = 1, 2, \dots K \;\Big/\; N_{i,j},\ i = 1, 2, \dots K-1 \quad j = 0, 1, 2, \dots mi \;\Big/\; GD$$

2-2 الرموز المستخدمة :

$N_{i,j}$: يمثل الحد الاعلى لعدد الوحدات المسموح بها بين كل مرحلتين متتاليتين .

$M_{Ni,j}$: يمثل الأزمنة بين وصول وآخر للوحدات المنتجة من قبل مكائن المرحلة (i , $i = 1,2, \dots K-1$) العاملة منها للمرحلة التي تليها ($i+1$) والتي تتبع التوزيع الأسي (Exponential - Distribution) وبمعدلات وصول تتغير بتغير عدد الوحدات بين كل مرحلتين متتاليتين .

$M_{Ni,j}$: يمثل أزمنة الخدمة لمكائن المرحلة $(i , i = 2, \ldots , K)$ العاملة منها والتي تتبع التوزيع الأسي أيضاً وبمعدلات خدمة تتغير تبعاً لتغير عدد الوحدات بين كل مرحلتين متتاليتين.

mi : يمثل عدد المكائن للمراحل $(1, 2, \ldots K)$ والتي هي محطات للخدمة.

$\lambda_{N1,0}$: معدل إنتاج جميع مكائن المرحلة الأولى حيث $(n < N_{1,1})$.

$\lambda_{N1,1}$: معدل إنتاج جميع مكائن المرحلة الأولى باستثناء الماكنة الأولى حيث $(N_{1,1} < n < N_{1,2})$.

$\lambda_{N1,2}$: معدل إنتاج جميع مكائن المرحلة الأولى باستثناء الماكنتين الأولى والثانية حيث $(N_{1,2} < n < N_{1,3})$.

λ_{N1,m_1-1} : معدل إنتاج الماكنة الأخيرة من المرحلة الأولى حيث $(N_{1,m1-1} < n < N_{1,m1})$ علما أن $(\lambda_{N1,m1} = 0)$ عندما $(n = N_{1,m1})$.

$\mu_{N2,0} = \lambda_{N2,0}$: معدل إنتاج الماكنة الأولى من المرحلة الثانية حيث $(0 < n < N_{1,1})$

$\mu_{N2,1} = \lambda_{N2,1}$: معدل إنتاج الماكنتين الأولى والثانية من المرحلة الثانية حيث $(N_{1,1} < n < N_{1,2})$.

$\mu_{N2,2} = \lambda_{N2,2}$: معدل إنتاج المكائن الثلاثة الأولى من المرحلة الثانية حيث $(N_{1,2} < n < N_{1,3})$

$\mu_{N2,m2-1} = \lambda_{N2,m2-1}$: يمثل معدل إنتاج جميع مكائن المرحلة الثانية باستثناء الماكنة الأخيرة حيث $(N_{1,m2-2} < n < N_{1,m1-1})$.

$\mu_{N2,m2} = \lambda_{N2,m2}$: يمثل معدل إنتاج جميع مكائن المرحلة الثانية حيث أن :

$$(N_{1,m1-i} < n < N_{1,m1})$$

$\mu_{N k-1,0} = \lambda_{Nk-1,0}$: معدل إنتاج المكائن الأولى من المرحلة قبل الأخيرة حيث $(1 < n < N_{k-2,1})$.

$\mu_{N k-1,1} = \lambda_{Nk-1,1}$: معدل إنتاج الماكنة الأولى والثانية من المرحلة قبل الأخيرة حيث $(N_{k-2,1} < n < N_{k-2,2})$.

$\mu_{Nk-1,mk-1} = \lambda_{Nk-1,mk-1}$: معدل إنتاج جميع مكائن المرحلة قبل الأخيرة حيث $(N_{k-2,m(k-1)-2} < n < N_{k-2,m(k-1)-1})$.

$\mu_{Nk,0}$: معدل إنتاج الماكنة الأولى من المرحلة الأخيرة حيث $(1 < n < N_{k-1,1})$.

$\mu_{Nk,1}$: معدل إنتاج الماكنتين الأولى والثانية من المرحلة الأخيرة حيث $(N_{k-1,1} < n < N_{k,1,2})$.

$\mu_{Nk,mk}$: معدل إنتاج جميع مكائن المرحلة الأخيرة حيث $(N_{k-1,mk-2} < n < N_{k-1,mk-1})$.

i : رقم المرحلة .

k : عدد المراحل الكلية للمنظومة.

$$\begin{array}{l}
\mathbf{N_{1.1} > N_{2.1} > N_{3.1} \;\ldots > N_{k,1}} \\
\mathbf{N_{1.2} > N_{2.2} > N_{2\text{-}3} \;\ldots > N_{k,2}} \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\mathbf{N_{1,m1} > N_{2,m2} > N_{3,\,m3} \ldots > N_{k,mk}}
\end{array}$$

3-2 معادلات النموذج :

لغرض اشتقاق صيغة نقوم من خلالها باحتساب القيم الاحتمالية لوجود (n) من الوحدات في نظام صف انتظار متعدد المراحل وبما أنه بالإمكان تحويل هذا النظـــام الـــى نظـــام ذي مرحلة واحدة بهدف تبسيط عملية الاشتقاق ويمكن إثبات أن :

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{N_{1,0}}}{\mu_{N_{2,0}}}\right)^n P_0 \qquad , 1 < n < N_{1,1} \quad \text{-----}(1)$$

$$P_n = \frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}}{(\mu_{N_{2,0}})^{N_{1,1}-1}} * \frac{P_o}{(\mu_{N_{2,1}})^{(n-N_{1,1})+1}} \qquad , n = N_{1,1} \quad \text{-----}(2)$$

$$P_n = \frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}(\lambda_{N_{1,1}})^{n-N_{1,1}}}{(\mu_{N_{2,1}})^{N_{1,1}-1}.(\mu_{N_{2,1}})^{(n-N_{1,1})+1}} P_o \qquad , N_{1.1} < n < N_{1.2} \quad \text{------}(3)$$

$$P_n = \frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,2}})^{n-N_{1,2}}}{(\mu_{N_{2,0}})^{N_{1,1}-1}.(\mu_{N_{2,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\mu_{N_{2,2}})^{(n-N_{1,2})+1}} P_o \quad , N_{1,2} < n < N_{1,1} \quad \text{---}(4)$$

$$P_n = \frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}(\lambda_{N_{1,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,2}})^{N_{1,3}-N_{1,2}}\ldots(\lambda_{N_{1,j}})^{n-N_{1,j}}}{(\mu_{N_{2,0}})^{N_{1,1}-1}.(\mu_{N_{2,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}(\mu_{N_{2,2}})^{N_{1,3}-N_{1,1}}\ldots(\mu_{N_{1,j}})^{(n-N_{1,j})+f}} * \frac{P_O}{\mu_{N_{1,j+1}}} \qquad ..\text{-----}(5)$$

اذ أن :

$$\begin{array}{l}
N_{1.j-1} < n < N_{1.j} \\
f = 1 \quad \text{if} \quad n < N_{1.j} \\
f = 0 \quad \text{if} \quad n = N_{1.j}
\end{array}$$

ان الصيغة (5) تمثل معادلة لاحتساب القيم الاحتمالية خاصـــــة بـــالمرحلتين الأولـــى والثانية ومنها يمكن إيجاد صيغة عامة لاحتساب وجود (n) من الوحدات بين أي مرحلتيـــــن متتاليتين التي من خلالها يمكن أن نحصل على قيم (P_n) خاصة بالمنظومة متعددة المراحل.

$$P_{i,n} = \frac{(\lambda_{N_{i,0}})^{N_{i,1}} (\lambda_{N_{i,1}})^{N_{i,2}-N_{i,1}} \cdots (\lambda_{N_{i,mi}})^{n-N_{i,j}}}{(\mu_{N_{i+1,0}})^{N_{i,1}-1} . (\mu_{N_{i+1,1}})^{N_{i,2}-N_{i,1}} \cdots (\mu_{N_{i+1,j}})^{(n-N_{i,j})+f}} * \frac{P_O}{(\mu_{N_{i,j+1}})} \quad \ldots (6)$$

حيث أن:

$N_{i,j}-1 < n < N_{i,j}$

$f = 1 \quad \text{if} \quad n < N_{i,j}$

$f = 0 \quad \text{if} \quad n = N_{i,j}$

- يمكن الحصول على قيمة (P_0) احتمال خلو النظام مـــن الوحـــدات باســـتخدام العلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

- لحساب معدل عدد الزبائن في النظام فاننا نستخدم العلاقة :

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n$$

- معدل عدد الزبائن في صف الانتظار يحتسب باستخدام العلاقة :

$$\bar{q} = \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) p_n$$

- وبما يلائم عمل هذا النموذج وكما يأتي :

$$\left[\sum_{i=1}^{k-1} \left[\sum_{n=2}^{N_{i,1}-1} (n-1) P_n + \sum_{n=N_{i,1}}^{N_{i,2}-1} (n-2) P_n \ldots + \sum_{n=N_{i,mi-1}}^{N_{i,mi}} (n-m_i) P_n \right] \right] \quad .. (7)$$

2-3-1 مثال*

لغرض توضيح عملية استخراج مؤشرات الأداء لمنظومة صف انتظار متعددة المراحل فأنه تم اعتماد البيانات المبينة أدناه والتي تصف المنظومة التي اتخذت كمثال لهذا الغرض.

عدد المراحل (K) = 4 مراحل.

عدد مكائن كل مرحلة $(m_i, i = 1,2,3,4)$ = 3 ماكنة .

معدل إنتاج الماكنة الأولى من المرحلة الأولى = 4 وحدات / ساعة.

معدل إنتاج الماكنة الثانية من المرحلة الأولى = 2 وحدة / ساعة.

معدل إنتاج الماكنة الثالثة من المرحلة الأولى= 2 وحدة / ساعة.

معدل إنتاج كل ماكنة من مكائن المرحلة الثانية = 8 وحدات / ساعة.

معدل إنتاج كل ماكنة من مكائن المرحلة الثالثة = 10 وحدات / ساعة. معدل إنتاج كل ماكنة من مكائن المرحلة الرابعة = 13 وحدات / ساعة.

$N_{1,0}$ = 7 وحدات.

$N_{1,1}$ = 8 وحدات.

$N_{1,2}$ = 10 وحدات.

$N_{2,0}$ = 6 وحدات.

$N_{2,1}$ = 8 وحدات.

$N_{2,2}$ = 9 وحدات.

$N_{3,0}$ = 5 وحدات.

$N_{3,1}$ = 6 وحدات.

$N_{3,2}$ = 7 وحدات.

2-3-2 الحل

بعد تجزئة المنظومة وتحويلها من منظومة ذات أربع مراحل الى ثلاث منظومات كل منها ذات مرحلة واحدة يتم استخراج مقاييس كفاءة الأداء لكل منظومة وكالآتي :

---

* يمكن تطبيق هذا النموذج في احدى المصانع الانتاجية عند توفر البيانات اللازمة .

أولاً : عندما تكون قيمة (i=1).

- بتطبيق المعادلة (6) فأنه سنحصل على القيم الاحتمالية وكما مبين أدناه:

$$P_{1,1}=\left(\frac{\lambda_{N_{1,0}}}{\mu_{N_{2,0}}}\right)P_{1,0}=\left(\frac{8}{8}\right)P_{1,0}=P_{1,0}$$

$$P_{1,2}=\left(\frac{\lambda_{N_{1,0}}}{\mu_{N_{2,0}}}\right)^{2}P_{1,0}=\left(\frac{8}{8}\right)^{2}P_{1,0}=P_{1,0}$$

$$P_{1,3}=\left(\frac{\lambda_{N_{1,0}}}{\mu_{N_{2,0}}}\right)^{3}P_{1,0}=\left(\frac{8}{8}\right)^{3}P_{1,0}=P_{1,0}$$

$$P_{1,6}=\left(\frac{\lambda_{N_{1,0}}}{\mu_{N_{2,0}}}\right)^{6}P_{1,0}=\left(\frac{8}{8}\right)^{6}P_{1,0}=P_{1,0}$$

$$P_{1,5}=\left(\frac{\lambda_{N_{1,0}}}{\mu_{N_{2,0}}}\right)^{5}P_{1,0}=\left(\frac{8}{8}\right)^{5}P_{1,0}=P_{1,0}$$

$$P_{1,7}=\frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}}{(\mu_{N_{2,0}})^{N_{1,1}-1}.(\mu_{N_{2,1}})^{(n-N_{1,1})+1}}P_{1,0}=\frac{(8)^{7}}{(8)^{6}.(16)}P_{1,0}=\frac{P_{1,0}}{2}$$

$$P_{1,8}=\frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,1}})^{n-N_{1,1}}}{(\mu_{N_{2,0}})^{(N_{1,1})-1}.(\mu_{N_{2,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\mu_{2,2})^{(n-N_{1,2})+1}}P_{1,0}=\frac{(8)^{7}.(4)}{(8)^{6}.(16).(24)}P_{1,0}=\frac{P_{1,0}}{12}$$

$$P_{1,9}=\frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,2}})^{n-N_{1,1}}}{(\mu_{N_{2,0}})^{(N_{1,1})-1}.(\mu_{N_{2,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\mu_{2,2})^{(n-N_{1,2})+1}}P_{1,0}=\frac{(8)^{7}.(4).(2)}{(8)^{6}.(16).(24)^{2}}P_{1,0}=\frac{P_{1,0}}{144}$$

$$P_{1,10}=\frac{(\lambda_{N_{1,0}})^{N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\lambda_{N_{1,2}})^{N_{1,3}-N_{1,2}}}{(\mu_{N_{2,0}})^{(N_{1,1})-1}.(\mu_{N_{2,1}})^{N_{1,2}-N_{1,1}}.(\mu_{2,2})^{N_{1,3}-N_{1,2}}}P_{1,0}=\frac{(8)^{7}.(4).(2)^{2}}{(8)^{6}.(16).(24)^{3}}P_{1,0}=\frac{P_{1,0}}{1728}$$

وتم الحصول على قيمة ($P_{1,0}$) والتي تمثل احتمال خلو النظام من الوحـــدات والتـــي ظهرت كالآتي:

$P_{1,0} = 0.13173744$

وبعد تعويض قيمة ($P_{1,0}$) في أعلاه نحصل على باقي الاحتمالات وهي:

$P_{1,1} = 0.13173744$
$P_{1,2} = 0.13173744$
$P_{1,3} = 0.13173744$
$P_{1,4} = 0.13173744$
$P_{1,5} = 0.13173744$
$P_{1,6} = 0.13173744$
$P_{1,7} = 0.06586872$
$P_{1,8} = 0.01097812$
$P_{1,9} = 0.00091484333$
$P_{1,10} = 0.000076236944$

- وللحصول على معدل عدد الوحدات في المنظومة نستخدم الصيغة الاتية :

$$\bar{n}_1 = \sum_{n=1}^{10} n \; p_{1,n}$$

$$P_{1,1} + (2 * P_{1,2}) + (3 * P_{1,3}) + (4 * P_{1,4}) + \ldots + (10 * P_{1,10})$$

$$\bar{n}_1 = 3.324425147$$

- ومن خلال توظيف الصيغة (7) تم الحصول على معدل عدد الوحدات في صـــف الانتظار ($\bar{q}_1$) وكما مبين في أدناه :

$$\bar{q}_1 = \sum_{n=2}^{6}(n-1)P_{1,n} + \sum_{n=7}^{7}(n-2)P_{1,n} + \sum_{n=8}^{10}(n-3)P_{1,n}$$

$$\bar{q}_1 = P_2 + 2P_3 + 3P_4 + 4P_5 + 5P_6 + 5P_7 + 5P_8 + 6P_9 + 7P_{10}$$

$$\bar{q}_1 = 2.36631851$$

ثانيا: عندما تكون قيمة $(i=2)$ يتبع الإسلوب نفسه في الفقرة أولا فنحصل علـــى المقـــاييس المطلوبة وللمنظومة الثانية وكما مبين أدناه:

- القيم الاحتمالية :

$$P_{2,0}=0.250568768$$
$$P_{2,1}=0.200455014$$
$$P_{2,2}=0.160364011$$
$$P_{2,3}=0.128291209$$
$$P_{2,4}=0.102632967$$
$$P_{2,5}=0.082106374$$
$$P_{2,6}=0.032842549$$
$$P_{2,7}=0.017516026$$
$$P_{2,8}=0.014012821$$
$$P_{2,9}=0.011210256$$

- معدل عدد الوحدات في المنظومة $(\bar{n}_2)$:

$$\bar{n}_2=\sum_{n=1}^{9} nP_{2,n}$$

$$\bar{n}_2=2.259782995$$

- معدل عدد الوحدات في صف الانتظار $(\bar{q}_2)$:

$$\bar{q}_2=\sum_{n=2}^{5}(n-1)P_{2,n}+\sum_{n=6}^{6}(n-2)P_{2,n}+\sum_{n=7}^{9}(n-3)P_{2,n}$$

$$\bar{q}_2=1.520321976$$

ثالثاً: عندما تكون قيمة $(i = 3)$ وباستخدام الصيغ ذاتها المذكورة بالفقرة (أولاً) فـــأن مقاييس الأداء للمنظومة الثالثة جاءت كالآتي :

- القيم الاحتمالية :

$P_{3,0} = 0.292134052$
$P_{3,1} = 0.224718501$
$P_{3,2} = 0.172860385$
$P_{3,3} = 0.132969527$
$P_{3,4} = 0.102284251$
$P_{3,5} = 0.039340096$
$P_{3,6} = 0.020174408$
$P_{3,7} = 0.015518775$

- معدل عدد الوحدات في النظام $(\bar{n}_3)$:

$$\bar{n}_3 = \sum_{n=1}^{7} nP_{3,n} \qquad = 1.804863209$$

- معدل عدد الوحدات في صف الانتظار $(\bar{q}_3)$:

$$\bar{q}_3 = \sum_{n=2}^{4}(n-1)P_{3,n} + \sum_{n=5}^{6}(n-2)P_{3,n} + \sum_{n=7}^{7}(n-3)P_{3,n}$$

$$\bar{q}_3 = 1.006445212$$

- متوسط عدد الوحدات في النظام $(\bar{n})$ لكل المنظومة :

$$\bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 \quad = 7.389071351$$

- معدل عدد الوحدات في صف الانتظار $(\bar{q})$ لكل المنظومة :

$$\bar{q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 = 4.893085698$$

- نسبة الزمن الذي تكون فيه الماكنة الأولى من المرحلة الثالثة متوقفة هو :

$P_{2,0} = 0.250568768$

ولذلك فأن هذه الماكنة ستعمل بنسبة زمن قدرها (0.749431232)

- نسبة الزمن الذي تكون فيه الماكنة الثانية من المرحلة الثالثة متوقفة :

$$P_{2,n}<6 = P_{2,0} + P_{2,1} + P_{2,2} + \ldots, + P_{2,5}$$
$$= 0.924418343$$

مما يعني أن نسبة الزمن الذي تكون فيـــه هـــذه الماكنـــة فـــي حالـــة عمـــل هـــي (0.075581657)

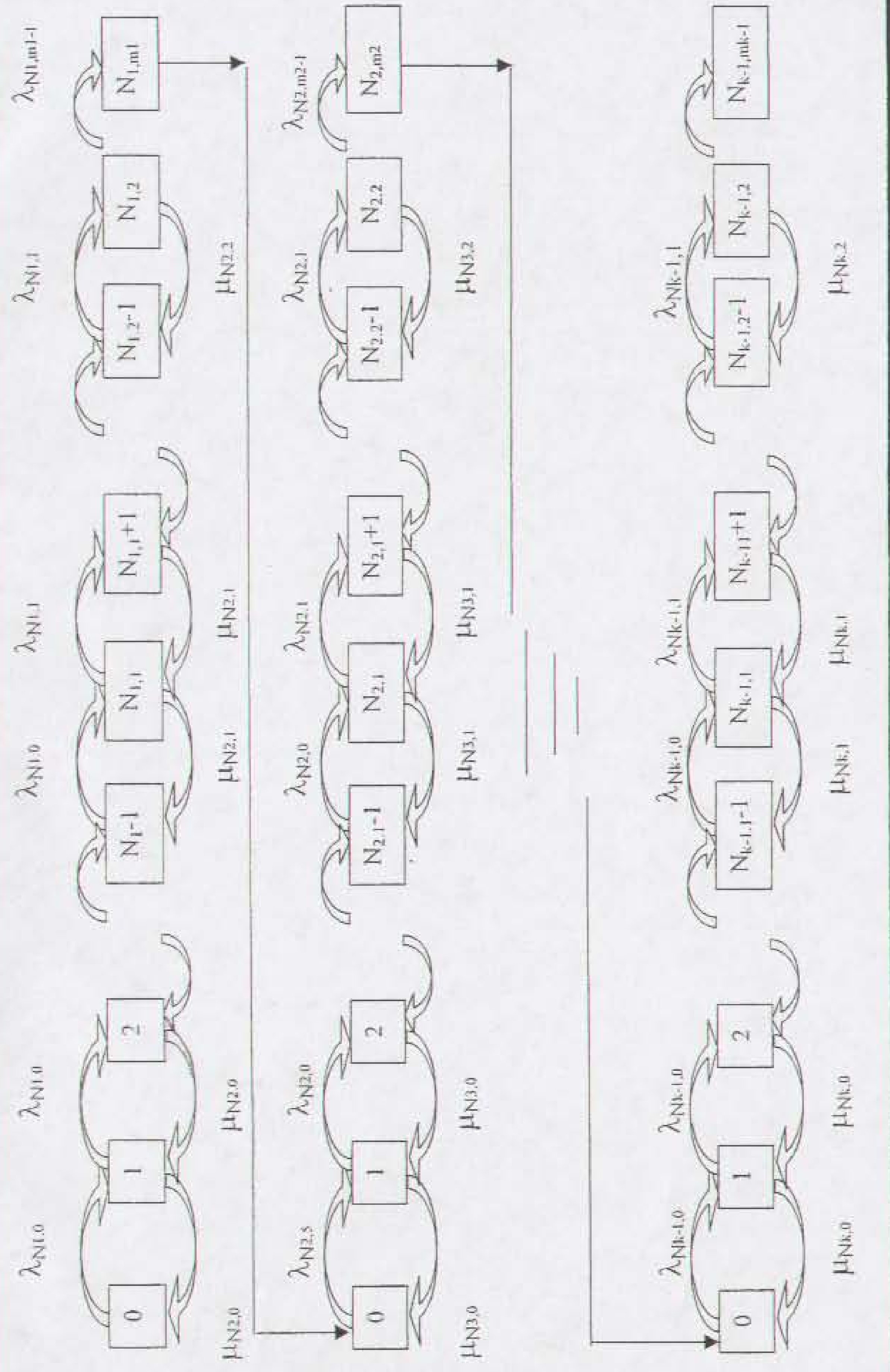
أما الماكنة الثالثة من نفس المرحلة فأن نسبة توقفها هي :

$$P_{2,n}<7 = P_{2,0} + P_{2,1} + P_{2,2} + \ldots, + P_{2,6}$$
$$= 0.957260892$$

وعليه فأن نسبة الزمن الذي تكون فيه هذه الماكنة في حالة عمل هي :

(0.042739108)

لا زال البحث مستمراً لتعميم هذا التصميم والقيام بمحاكاته على بيانات مولدة وتطبيقه على بيانات حقيقية في احدى قطاعات الدولة .



المخطط (2) يمثل عمليات الانتقال للنموذج

الاستنتاجات والتوصيات

مما تقدم وبعد تدقيق وتحليل النتائج التي حصلنا عليها توصلنا الى الاستنتاجات الآتية:-

اولاً- امكن الحصول على الحل التحليلي لنموذج صف الانتظار المقترح (متعدد المراحل) وتم توضيح اسلوب عمله من خلال مثال لمشكلة صف انتظار لمنظومة انتاجية ذات اربعة مراحل مع حل مفصل امكن من خلاله الحصول على القيم الاحتمالية واكثر مقاييس الاداء والتي نحتاجها لتوقع كيفية عمل هذه المنظومة .

ثانيا - يعد النموذج المقترح مفيد جدا في السيطرة على عدد الوحدات المنتجة في المنظومات الصناعية ذات المراحل المتعددة عندما يسمح لمعدلات الانتاج بان تكون متغيرة تبعا لعدد الوحدات المنتجة بين المراحل.

ثالثا - يعد هذا النموذج مفيد جدا للطلبة والباحثين الذين يرمون تعلم نماذج انتظار رياضية متقدمة مع تطبيقاتها .

رابعاً- نوصي ببناء نموذج محاكاة يعالج نموذج صف الانتظار المقترح.

المصادر العربية

(1) شبحان، حسين جاسم، (1985)، " نماذج المشابهة واستخداماتها مع تطبيق عملي على تنظيم حركة السير في مدينة بغداد – تقاطع أبي طالب "، رسالة ماجستير قسم الإحصاء/ كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة بغداد .

(2) علم الدين، عماد حسام الدين، (1999)، " مقارنة تجريبية بين نماذج الإضافة الثابتة والإضافة المتغيرة للزمن لبعض أنظمة صفوف الانتظار "، رسالة ماجستير/ قسم الإحصاء / كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة بغداد.

(3) محمد، صادق محمد، (1985)، " دراسة نظام صيانة السيارات في جامعة البصرة باستخدام نظرية صفوف الانتظار"، مجلة تنمية الرافدين.